文章编号:1005-3085(2010)03-0396-07

模糊序列的GM(1,1)建模*

陈定元， 钟金标

(安庆师范学院数学系，安徽 安庆 246011)

摘 要: 本文在不改变GM(1,1)模型建模机理的前提条件下，运用模糊回归理论对GM(1,1)模型进行优化，通过定义三角模糊数的左、中、右距离，将模糊序列的GM(1,1)模型的求解转化为线性规划模型的求解，并通过实例加以论证。研究表明模糊序列的GM(1,1)模型保留了GM(1,1)模型所需建模数据少和具有预测功能的特点，且能为决策者提供一个决策区间。

关键词: GM(1,1)模型；模糊回归模型；模糊序列；三角模糊数；距离

分类号: **AMS**(2000) 03E172 **中图分类号**: O159 **文献标识码**: A

1 引言

灰色建模作为灰色系统理论的重要内容，其在社会生活的诸多方面得到了广泛的应用。为了提高模型的可靠性与适用性，许多科技工作者在邓聚龙先生提出的模型的基础上提出了针对性较强的模型[1-7]。研究表明，原始序列数据的模式及光滑性是影响模型精度的两个主要因素，因而形成了两种提高GM(1,1)模型精度的方法：对传统的GM(1,1)模型进行修正使之适应原始序列数据的模式；对原始序列数据进行变换以改善其光滑性。现有研究成果很少涉及模糊序列的GM(1,1)建模。只有文献[8]讨论了对称三角模糊数的GM(1,1)建模问题，但求解方法繁琐，使用范围有限。本文将在文献[8]的基础上利用模糊回归理论对GM(1,1)模型建行优化，实现模糊序列的GM(1,1)建模，并探讨相对简洁的求解方法。

2 GM(1,1)模型建模概述

GM(1,1)模型主要用于单个时间序列的动态预测，具体过程如下：设有非负原始时间序列

$$x^{(0)}=\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)\}.$$

1) 对原始时间序列作一次累加生成序列 $x^{(1)}=AGOx^{(0)}$

$$x^{(1)}=\{x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n)\},$$

其中

$$x^{(1)}(i)=\sum_{m=1}^{i}x^{(0)}(m),\quad i=1,2,\cdots,n.$$

2) GM(1,1)模型的灰微分方程为

$$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b, \tag{1}$$

收稿日期: 2008-07-09. **作者简介**: 陈定元(1975年2月生)，男，副教授. 研究方向：模糊数学与灰色理论.

***基金项目**: 安徽省高校青年教师资助计划(2008jql098).

其中

$$z^{(1)}(k) = \frac{1}{2}\big(x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1)\big), \quad k = 2, 3, \cdots, n,$$

称为白化背景值，a 称为发展系数，b 称为灰作用量。其对应的白化微分方程为

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b. \tag{2}$$

根据最小二乘法原理，式 (1) 的参数可由下式求出

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = (B^T B)^{-1} B^T Y_N, \tag{3}$$

$$B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}, \quad Y_N = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix},$$

对应于式 (3) 求得参数 $\hat{a}$, $\hat{b}$，则式 (2) 在初始条件 $x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$ 下的解为

$$\hat{x}^{(1)}(t) = \Big(x^{(0)}(1) - \frac{\hat{a}}{\hat{b}}\Big)\mathrm{e}^{-\hat{a}(t-1)} + \frac{\hat{a}}{\hat{b}}. \tag{4}$$

3) 作一次累减还原$\hat{x}^{(0)}(t) = IAGO\hat{x}^{(1)}(t)$便可得到原始序列的拟合函数

$$\hat{x}^{(0)}(t) = \begin{cases} x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1), & t = 1, \\ \hat{x}^{(1)}(t) - \hat{x}^{(1)}(t-1) = (1 - \mathrm{e}^{\hat{a}})\Big(x^{(0)}(1) - \dfrac{\hat{a}}{\hat{b}}\Big)\mathrm{e}^{-\hat{a}(t-1)}, & t > 1, \end{cases}$$

当 $t = 1, 2, 3, \cdots, n$ 时，式 (4) 就是式 (2) 的离散形式解

$$\hat{x}^{(0)}(k) = (1 - \mathrm{e}^{\hat{a}})\Big(\hat{x}^{(0)}(1) - \frac{\hat{a}}{\hat{b}}\Big)\mathrm{e}^{-\hat{a}(k-1)}, \tag{5}$$

$\hat{x}^{(0)}(k)$, $k = 1, 2, \cdots, n$，是原始序列数据的拟合值；$\hat{x}^{(0)}(k)$, $k > n$，是模型的预测值。

从 (5) 式可以看出，GM(1,1) 模型的模拟与预测精度取决于最小乘法求取的参数 $\hat{a}$, $\hat{b}$ 以及初值 $x^{(0)}(1)$，且初值 $x^{(0)}(1)$ 对生成序列 $x^{(1)}$ 和原始序列的模拟预测值 $\hat{x}^{(0)}$ 均具有指数效应[7]。为了消除初值 $x^{(0)}(1)$ 对原始序列预测值的指数效应，结合 (4) 式和 (5) 式，可以将预测序列的表现形式优化为

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = (1 - \mathrm{e}^{\hat{a}})\Big(x_1^{(0)} - \frac{\hat{b}}{\hat{a}}\Big)\mathrm{e}^{-\hat{a}k} = A_0 + A_1 x^{(1)}(k). \tag{6}$$

式 (6) 其实是一个线性回归模型。根据模糊线性回归理论，A_0, A_1 不仅可以取实数，而且可以取模糊数。当 A_0, A_1 取模糊数时，式 (6) 表达为

$$\tilde{x}^{(0)}(k+1) = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 x^{(1)}(k).$$

此时不管原始序列是实数序列，还是模糊序列，输出序列均为一模糊 (区间) 数序列，从而为决策者提供一个决策区间，在实际中具有广泛地应用。

3 原始时间序列为模糊数的 GM(1,1) 建模

为了简化模型的研究，以下模糊数均取为三角模糊数。当原始输入序列为模糊序列，即

$$\tilde{x}^{(0)} = \{\tilde{x}^{(0)}(1), \tilde{x}^{(0)}(2), \cdots, \tilde{x}^{(0)}(n)\},$$

其中

$$\tilde{x}^{(0)}(i) = \left(\tilde{x}^{(0)}(i)^L, \tilde{x}^{(0)}(i)^C, \tilde{x}^{(0)}(i)^R\right), \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

原始序列通过一次累加得到模糊生成序列为 $\tilde{x}^{(1)} = AGO\tilde{x}^{(0)}$

$$\tilde{x}^{(1)} = \{\tilde{x}^{(1)}(1), \tilde{x}^{(1)}(2), \cdots, \tilde{x}^{(1)}(n)\},$$

其中

$$\tilde{x}^{(1)}(i) = \left(\tilde{x}^{(1)}(i)^L, \tilde{x}^{(1)}(i)^C, \tilde{x}^{(1)}(i)^R\right), \quad \tilde{x}^{(1)}(i)^L = \sum_{m=1}^{i} \tilde{x}^{(0)}(m)^L,$$

$$\tilde{x}^{(1)}(i)^C = \sum_{m=1}^{i} \tilde{x}^{(0)}(m)^C, \quad \tilde{x}^{(1)}(i)^R = \sum_{m=1}^{i} \tilde{x}^{(0)}(m)^R, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

则基于回归理论的 GM(1,1) 优化模型为

$$\tilde{X}^{(0)}(k+1) = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 \tilde{x}^{(1)}(k), \tag{7}$$

式中 $\tilde{A}_0 = (A_0^L, A_0^C, A_0^R)$，$\tilde{A}_1 = (A_1^L, A_1^C, A_1^R)$，其中 A_i^L, A_i^C, A_i^R 分别为 $\tilde{A}_i$，$i = 0, 1$ 的下界值、中心值、上界值，则它们的隶属度函数为

$$\mu_{\tilde{A}_i(x)} = \begin{cases} 1 - \frac{A_i^c - x}{(A_i^C - A_i^L)}, & A_i^L \le x \le A_i^C, \\ 1 - \frac{x - A_i^c}{(A_i^R - A_i^C)}, & A_i^C \le x \le A_i^R, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

运用 Zade 的扩张原理，可以得到模糊输出的隶属度函数为

$$\mu_{\tilde{X}_{k+1}^{(0)}(x)} = \begin{cases} 1 - \frac{x - (A_0^c + A_1^c x^{(1)}(k))}{(A_0^R - A_0^c) + (A_1^R - A_1^c) x^{(1)}(k)}, & \left(A_0^c + A_1^c x^{(1)}(k)\right) \\ & \le x \le \left(A_0^c + A_1^c x^{(1)}(k)\right) + \left(A_0^R + A_0^R x^{(1)}(k)\right), \\ 1 - \frac{(A_0^c + A_1^c x^{(1)}(k)) - x}{(A_0^c - A_0^L) + (A_1^c - A_1^L) x^{(1)}(k)}, & \left(A_0^c + A_1^c x^{(1)}(k)\right) \\ & - \left(A_0^L + A_0^L x^{(1)}(k)\right) \le x \le \left(A_0^c + A_1^c x^{(1)}(k)\right), \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

根据模糊回归理论，模型 (7) 式的求解就是确定最优模糊参数 $\tilde{A}_0$, $\tilde{A}_1$，使模糊输出的隶属度大于等于 h，且左右扩展值尽可能小。即

$$\mu_{\tilde{X}^{(0)}(k+1)(x)} \geqslant h, \tag{8}$$

其中 $h\,(0 \le h \le 1)$ 由用户确定，用来衡量模型对样本的拟合程度。文献 [9] 建议 h 值选择应根据原始序列 (样本) 的个数确定。当原始序列的容量充分大时，可以选择 $h = 0$，随着样本容量的减小，h 的值随之增大，但中心值不变。文献 [10] 推荐 h 的取值范围为 $0.5 - 0.7$。现有研究成果多是将 (8) 式转化为线性规划问题求解，其求解方法见文献 [8]。在此，针对模糊序列的 GM(1,1) 模型，本文提出一套相对简洁的计算方法。

对模型 $\tilde{X}^{(0)}(k+1) = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1\tilde{x}^{(1)}(k)$ 的求解，根据文献 [11] 的研究思想，引入模糊数左、中、右距离的定义。

定义　设三角模糊数 $\tilde{A} = (A^L, A^C, A^R)$，$\tilde{B} = (B^L, B^C, B^R)$，定义三角模糊数距离：

1)　左距离：$d_L(\tilde{A}, \tilde{B}) = (A^L - B^L)^2$；

2)　中距离：$d_C(\tilde{A}, \tilde{B}) = (A^C - B^C)^2$；

3)　右距离：$d_R(\tilde{A}, \tilde{B}) = (A^R - B^R)^2$。

实数可以看成是下界值、上界值、中心值相等的特殊模糊数。根据三角模糊数左、中、右距离的定义和性质以及回归模型的求解原理，求解 (7) 式中的模糊参数 $\tilde{A}_0$, $\tilde{A}_1$ 就是其在模糊数左、中、右距离的意义下数据

$$\big(\tilde{X}^{(0)}(i)^L, \tilde{x}^{(0)}(i)^L\big),\ \big(\tilde{X}^{(0)}(i)^C, \tilde{x}^{(0)}(i)^C\big),\ \big(\tilde{X}^{(0)}(i)^R, \tilde{x}^{(0)}(i)^R\big),\quad i = 1, 2, \cdots, n-1$$

的误差平方和最小。根据左右扩展值尽可能小的原则，即在模糊左、中、右距离的意义下模糊拟值与原始序列的左、中、右距离最小。所以求解模型 $\tilde{X}^{(0)}(k+1) = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1\tilde{x}^{(1)}(k)$ 就转化为

$$\min d_L\big(\tilde{x}^{(0)}, \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 x^{(1)}\big) = \min \sum_{i=1}^{n-1} \big(x^{(0)}(i+1)^L - (A_0^L + A_1^L x^{(1)}(i)^L)\big)^2,$$

$$\min d_C\big(\tilde{x}^{(0)}, \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 x^{(1)}\big) = \min \sum_{i=1}^{n-1} \big(x^{(0)}(i+1)^C - (A_0^C + A_1^C x^{(1)}(i)^C)\big)^2,$$

$$\min d_R\big(\tilde{x}^{(0)}, \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 x^{(1)}\big) = \min \sum_{i=1}^{n-1} \big(x^{(0)}(i+1)^R - (A_0^R + A_1^R x^{(1)}(i)^R)\big)^2.$$

根据最小二乘法，令

$$\frac{\partial d_L}{\partial A_0^L} = \sum_{i=1}^{n-1}(x^{(0)}(i+1)^L - (A_0^L + A_1^L x^{(1)}(i)^L)) = 0,$$

$$\frac{\partial d_L}{\partial A_1^L} = \sum_{i=1}^{n-1}(x^{(0)}(i+1)^L - (A_0^L + A_1^L x^{(1)}(i)^L)x^{(1)}(i)^L) = 0,$$

$$\frac{\partial d_C}{\partial A_0^C} = \sum_{i=1}^{n-1}(x^{(0)}(i+1)^C - (A_0^L + A_1^C x^{(1)}(i)^C)) = 0,$$

$$\frac{\partial d_C}{\partial A_1^C} = \sum_{i=1}^{n-1}(x^{(0)}(i+1)^C - (A_0^L + A_1^C x^{(1)}(i)^C)x^{(1)}(i)^C) = 0,$$

$$\frac{\partial d_R}{\partial A_0^R} = \sum_{i=1}^{n-1}(x^{(0)}(i+1)^R - (A_0^R + A_1^R x^{(1)}(i)^R)) = 0,$$

$$\frac{\partial d_R}{\partial A_1^R} = \sum_{i=1}^{n-1}(x^{(0)}(i+1)^R - (A_0^R + A_1^R x^{(1)}(i)^R)x^{(1)}(i)^R) = 0,$$

求解这一线性规划问题得

$$\begin{aligned}
&\tilde{A}_0 = \big(A_0^L, A_0^C, A_0^R\big), \quad \tilde{A}_1 = \big(A_1^L, A_1^C, A_1^R\big),\\
&\tilde{X}^{(0)}(k+1) = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1\tilde{x}^{(1)}(k) = \big\{A_0^L, A_0^C, A_0^R\big\} + \big\{A_1^L, A_1^C, A_1^R\big\}\tilde{x}^{(1)}(k)\\
&\qquad\qquad\quad = \big\{X^{(0)}(k+1)^L,\, X^{(0)}(k+1)^C,\, X^{(0)}(k+1)^R\big\},
\end{aligned}$$

其中 $X^{(0)}(k+1)^L$, $X^{(0)}(k+1)^C$, $X^{(0)}(k+1)^R$ 分别为 $\tilde{X}^{(0)}(k+1)$ 的下界值、中心值、上界值。根据 (8) 式，对于任意的 $h \in [0,1]$，有

$$\begin{aligned}
&x^{(0)}(k+1)^L = A_0^C - (1-h)A_0^L + \big[A_1^C - (1-h)A_1^L\big]x^{(1)}(k),\\
&x^{(0)}(k+1)^C = A_0^C + A_1^C x^{(1)}(k),\\
&x^{(0)}(k+1)^R = A_0^C + (1-h)A_0^R + \big[A_1^C + (1-h)A_1^R\big]x^{(1)}(k),\\
&\big[\tilde{x}^{(0)}(i+1)\big]_h \subset \big[\tilde{X}^{(0)}(i+1)\big]_h, \quad \forall\, h \in [0,1], \quad k = 1,2,\cdots,n-1,
\end{aligned}$$

与文献 [12] 的研究结果相一致。

算例 文献 [8] 用优化 GM(1,1) 模型讨论了台湾地区 2001-2004 年 LCD TV 模型销售量的 GM(1,1) 建模问题，现用其数据检验本文的关于模糊序列 GM(1,1) 模型及算法的可靠性，并加以分析对比。

利用本文所建的模糊序列的 GM(1,1) 模型并结合上述算法，得到台湾地区 2001-2005 年 LCD TV 销售量的模糊模拟与预测结果，见表 1。将本文模型及算法结果，与收集到的原始序列数据，文献 [8] 的研究结果进行对比，如图 1 所示。

表 1: 本文的模糊序列的 GM(1,1) 模型及其算法的可行性分析

预测值	统计数据	本文模型及算法结果	文献 [8] 模型及算法结果 ($h = 0$)
$\tilde{X}^{(0)}(2001)$	(73,81,89)	(73,81,89)	(73,81,89)
$\tilde{X}^{(0)}(2002)$	(138, 150, 162)	(159.9, 169.9, 180.2)	(150.33, 194.43)
$\tilde{X}^{(0)}(2003)$	(377, 393, 409)	(347.1, 365.4, 383.6)	(349.83, 393.93)
$\tilde{X}^{(0)}(2004)$	(850, 870, 890)	(858.0, 877.6, 897.2)	(872.52, 916.62)
$\tilde{X}^{(0)}(2005)$	(2010.2, 2011.4, 2014.8)	(2029.62, 2073.72)	

通过表 1 和图 1 可以看出，本文所建模型及所提算法的结果与收集数据和文献 [8] 的研究结果较吻合，因此是可行的。

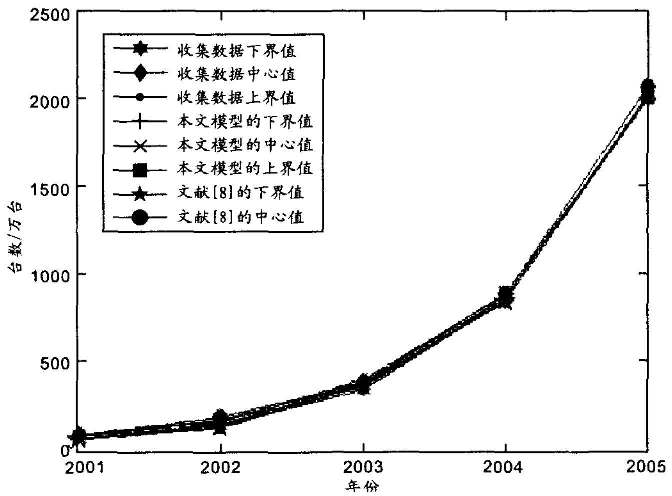

图 1:　数据对比图

4　结束语

本文根据GM(1,1)模型与模糊回归模型建模的数学机理，对GM(1,1)模型进行优化，实现了模糊序列的GM(1,1)建模；根据定义的三角得模糊数的左中右距离公式，得到了模糊序列的GM(1,1)模型的一套相对简洁的算法，通过实例论证了模型及其算法具有较好的可靠性；同时，模型保留了传统GM(1,1)的所需建模数据少和具有预测功能的优点，又可以通过模糊输出为决策者提供一个决策区间，具有一定的实际意义。

参考文献：

[1] 邓聚龙. 灰理论基础[M]. 武汉：华中科技大学出版社，2002
Deng J L. Grey Theory[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2002

[2] 谢乃明，刘思峰. 一类离散灰色模型及其预测效果研究[J]. 系统工程学报，2006, 21(5): 520-523
Xie N M, Liu S F. Research on discrete grey model and its predictive result[J]. Journal of Systems Engineering, 2006, 21(5): 520-523

[3] 许秀莉，罗建. GM(1,1)模型的改进方法与应用[J]. 系统工程与电子技术，2002, 24(4): 60-63
Xu X L, Luo J. Improvement to GM(1,1) and its application[J]. Systems Engineering and Electronics, 2002, 24(4): 60-63

[4] 罗党，刘思峰. 灰色模型GM(1,1)优化[J]. 中国工程科学，2003, 5(8): 50-53
Luo D, Liu S F. The optimization of grey model GM(1,1)[J]. Chinese Engineering Science, 2003, 5(8): 50-53

[5] 穆勇. 优化灰导数白化值的无偏灰色GM(1,1)模型[J]. 数学的实践与认识，2003, 33(3): 13-16
Mu Y. An unbiased GM(1,1) model with optimum grey derivative's whitening values[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2003, 33(3): 13-16

[6] Wu C M, Zhang T, Gao X P. On discount weight grey modeling of GM(1,1)[J]. Journal of China Universities of Posts and Telecommunications, 1999, 6(2): 78-82

[7] 张辉，胡适耕. GM(1,1)模型的精确求解[J]. 系统工程理论方法应用，2001, (1): 71-73
Zhang H, Hu S G. Accurate solutioon for GM(1,1) model[J]. Systems Engineering-Theory, Methodology & Application, 2001, (1): 71-73

[8] Tsaur R C. Forecasting analysis by using fuzzy grey regression model for solving limited time series data[J]. Soft Comput, 2008, 12: 1105-1113
[9] Tanaka H, Watada J. Possibilistic linear systems and their application to the linear regression model[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 27(3): 275-289
[10] Bardossy A, Bogardi I. Fuzzy regression in hydrology[J]. Water Resources Resources Research, 1990, 26(7): 1497-1508
[11] 曹炳元，朱章遐. 含三角模糊参数的线性回归模型的新解法[J]. 汕头大学学报，2004, 19(4): 1-9
Cao B Y, Zhu Z X. A new method to the linear regression model with triangular fuzzy parameters[J]. Journal of Shantou University Natural Science Edition, 2004, 19(4): 1-9
[12] Tanaka H, Uejima S, Asai K. Fuzzy linear regression model[J]. IEEE Transaction on SMC, 1982, 12(6): 903-907

GM(1,1) Modeling on the Fuzzy Sequence

CHEN Ding-yuan, ZHONG Jin-biao

(Department of Mathematics, Anqing Teachers College, Anqing, Anhui 246011)

Abstract: Without changing the principle of the GM(1,1) modeling, this paper adopts the fuzzy regression model to optimize the GM(1,1) model. By defining the left distance, the middle distance and the right distance of a triangular fuzzy number, the GM(1,1) modeling on the fuzzy sequence is resolved by changing it into a linear programming problem and demonstrated through an example. Research shows that the GM(1,1) modeling on fuzzy sequence not only keeps the character of needing few data and prediction, but also can provide a decision interval to the decision maker.
Keywords: grey model GM(1,1); fuzzy regression model; fuzzy sequence; triangular fuzzy number; distance

Received: 09 July 2008. **Accepted:** 24 Aug 2009.
Foundation item: The Foundation for Young College Teachers of Anhui Province (2008jql098).